b] si f est de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, alors :

$$(T_f)' = T_{f'}$$

Exemples :

$x \longmapsto \sin x$ est continue donc loc intg sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow T_{\sin x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

avec $\langle T_{\sin x}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, \varphi(x) \, dx$.

Comme $x \longmapsto \sin x$ est $\mathcal{E}'$, alors :

$$(T_{\sin x})' = T_{(\sin x)'} = T_{\cos x}$$

c] Dérivée en sens de distribution d'une fonction discontinue :

soit $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R} \setminus \{a\})$ tq $f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

et $f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x)$ existent et sont finies

Comme $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Donc T_f est dérivable - $T_f' = ?$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle T_f', \varphi \rangle = - \langle T_f, \varphi' \rangle$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) \, dx = - \int_{-\infty}^{a} f(x) \varphi'(x) \, dx - \int_{a}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) \, dx$$

*) f est $\mathcal{E}'$ sur $]-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x) \varphi'(x) \, dx = [f(x) \varphi(x)]_{-\infty}^{a} - \int_{-\infty}^{a} f'(x) \varphi(x) \, dx$$

IPP $\left[\begin{array}{c} f \longrightarrow f' \\ \varphi' \longrightarrow \varphi \end{array} \right.$

$$= f(a^-) \varphi(a) - \int_{-\infty}^{a} f'(x) \varphi(x) \, dx \quad (\text{comme } \varphi \text{ a supp compact } \lim_{-\infty} \varphi = 0$$

2ème) f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et on a :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = \Big[f(x)\varphi(x)\Big]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx$$

$$\text{IPP}\begin{bmatrix} f \to f' \\ \varphi' \to \varphi \end{bmatrix}$$

$$= f(a^+)\varphi(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx$$

Alors 1ère) et 2ème) donnent :

$$\langle Tf', \varphi\rangle = -f(a^-)\varphi(a) + \int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)\,dx + f(a^+)\varphi(a) + \int_a^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx$$

$$= f(a^+)\varphi(a) - f(a^-)\varphi(a) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx$$

$$= \big(f(a^+) - f(a^-)\big)\varphi(a) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx$$

$$= \big(f(a^+) - f(a^-)\big)\langle \delta_a, \varphi\rangle + \langle Tf', \varphi\rangle$$

$$= \big\langle \big(f(a^+) - f(a^-)\big)\delta_a + Tf', \varphi \big\rangle$$

Cl : $\underline{Tf' = \big(f(a^+) - f(a^-)\big)\delta_a + Tf'}$

Exemple :

Soit $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) Justifier que T_f est une distribution et donner l'image de φ par T_f, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

2) Calculer Tf'

Réponse :

① f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$
donc elle est localement intg sur $\mathbb{R}$
et par suite on peut lui associer une distribution
c'est la dist régulière T_f définie par :

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \quad , \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2\varphi(x)\,dx + \int_0^{+\infty} (\sqrt{x} + 2)\varphi(x)\,dx$$

(8) Comme $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ donc elle est dérivable et on a :

$T_f' = ?$

Dans notre cas $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ avec :

$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x}+2) = 2$

$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$

Alors :

$T_f' = T_{f'} + (f(0^+) - f(0^-))\,\delta = T_{f'} + 2\delta$

avec $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$\langle T_f', \varphi\rangle = \langle T_{f'} + 2\delta, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0} 2x\varphi(x)\,dx + 2\varphi(0)$

Proposition (Formule des sauts) :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} a_k)$ tq $\forall k \in \{1,\dots,n\}$ on a :

$f(a_k^+) = \lim_{x\to a_k^+} f(x)$ et $f(a_k^-) = \lim_{x\to a_k^-} f(x)$

existent et sont finies. Alors :

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{k=1}^{n} \left(f(a_k^+) - f(a_k^-)\right)\delta_{a_k}$$

Exemple

pour $f(t) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ donc dérivable

de plus :

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\setminus\{-1,1\})$ avec

$f(1^+) = 0$ et $f(1^-) = 1$

$f(-1)^+) = 1$ et $f(-1^-) = 0$

D'après la formule des sauts :

$$T_f' = T_{f'} + (f(1^+) - f(1^-))\delta_1 + (f(-1^+) - f(-1^-))\delta_{-1}$$

$$= T_{f'} - \delta_1 + \delta_{-1}$$

avec :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow T_{f'} = 0$$

$$\Rightarrow T_f' = \delta_{-1} - \delta_1 = T_{\mathbb{1}_{[-1,1]}}'$$

avec : $\langle T_f', \varphi \rangle = \langle \delta_{-1} - \delta_1, \varphi \rangle = \varphi(-1) - \varphi(1)$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

La distribution valeur principale de $\frac{1}{x}$ $\left(Vp\left(\frac{1}{x}\right)\right)$:

Déf :

On appelle distribution valeur principale de $\frac{1}{x}$, notée $Vp\left(\frac{1}{x}\right)$; la dist définie par :

$$\left\langle Vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \; ; \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$\left(= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right) \right)$$

App :

Calculer au sens de distribution $x\,Vp\left(\frac{1}{x}\right)$?

- $Vp\left(\frac{1}{x}\right) \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$
- $x \to x$ est $\mathcal{C}^\infty$

$\Big\} \; x\,Vp\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

• soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle x\, vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \langle vp\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi(x) \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \langle T_1, \varphi \rangle \Rightarrow x\, vp\left(\frac{1}{x}\right) = T_1$$

Convergence d'une suite des distributions :

Déf : On dit qu'une suite de distributions $(T_n)_{n \geq 0}$ converge vers la dist $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ssi $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle T, \varphi \rangle$$

Proposition : Si la suite de dist $(T_n)_{n \geq 0}$ converge vers $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, Alors $(T_n')_{n \geq 0}$ converge vers T'

App 1 : soit $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}$ tq $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

Mq $\delta_{a_n} \xrightarrow[+\infty]{} \delta_a$?

App 2 : Considerons la suite des fonctions

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

i) Justifier que $(T_{f_n})_n$ est une suite de dist

ii) Calculer $\lim_{n \to +\infty} T_{f_n}$ = ?

Rappels (Th de la moyenne)

Si f est continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tq

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(c)$$

Rép :

(1) mq $\langle \delta_{a_n}, \varphi \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle \delta_a, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$\langle \delta_{a_n}, \varphi \rangle = \varphi(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(a)$ car : $a_n \xrightarrow[+\infty]{} a$ et φ est continue

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \langle \delta_{a_n}, \varphi \rangle = \lim\limits_{+\infty} \varphi(a_n) = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_{a_n} = \delta_a$

(2) i) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on peut associer à f_n une dist T_{f_n} définie par $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2} \varphi(x)\,dx = \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\,dx$$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_{f_n} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ donc dérivable et on a :

pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\,dx \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n}{2} \left(\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n}\right) \right) \varphi(c_n) \right| \quad \text{Th de moy}$$

avec $c_n \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n}{2} \cdot \frac{2}{n} \varphi(c_n) \right| = \lim_{n\to+\infty} \varphi(c_n) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_n \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \Rightarrow |c_n| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} c_n = 0$ et φ continue

$\lim\limits_{+\infty} \varphi(c_n) = \varphi(0)$

Feuille d'exercices N°1

Exercice 1:

a) Les fonctions suivantes sont-elles des distributions : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

1. $< T, \varphi >= |\varphi(0)|$ **2.** $< T, \varphi >= a, \quad a \in \mathbb{C}$ **3.** $< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cos(x)dx$

b) Montrer que $supp(\varphi') \subseteq supp(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Conclure

Exercice 2:

1. Montrer que $f(x) = \ln|x|$ est localement itégrable sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que
$$T'_{\ln|x|} = vp(\frac{1}{x})$$
3. En calculant de deux manière differentes la dérivée de la distribution $xT_{\ln|x|}$, montrer que
$$xvp(\frac{1}{x}) = T_1.$$

Exercice 3: Déterminer les limites dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des suite $(T_n)_n$ de distributions suivantes :

1. $T_n = n\left(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}\right)$ **2.** $T_n = n^2\left(\delta_{1/n} + \delta_{-1/n} - 2\delta_0\right)$ **3.** $T_n = T_{\sin(nx)}$

Exercice 4:

1. Montrer au sens des distributions que l'on a les dérivées suivantes :
$$T'_H = \delta(x) \qquad T''_{|x|} = 2\delta(x) \qquad T''_{x|x|} = 2sign(x)$$
où H est la fonction de Heaviside, δ la distribution de Dirac et $sign(x) = \frac{x}{|x|}$ pour $x \neq 0$ et $sign(0) = 0$.

2. (a) Simplifier les expressions suivantes dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:
i) $x^2\delta''(x) = 2\delta(x)$ **ii)** $x^3\delta''(x) = 0$

(b) Si $\delta^{(n)}$ désigne la dérivée n^{ieme} de δ, montrer le résultat suivant :
$$x^n\delta^{(n)}(x) = (-1)^n n!\delta(x) \quad \text{pour n entier} \geq 0.$$
Indication: On pourra montrer la relation par récurrence.

Exercice 5: On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ x \ . & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

et soit T_f l'application définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par :

$$< T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

1. Montrer que T_f définit une distribution sur $\mathbb{R}$
2. Calculer la dérivée de T_f (notée T'_f)
3. Calculer la dérivée seconde de T_f (notée T''_f)

Feuille d'exercices N° 1

Exo 1 :

a) ① Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T, \varphi \rangle = |\varphi(0)|$$

$$\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = |\varphi_1(0) + \varphi_2(0)| \leq |\varphi_1(0)| + |\varphi_2(0)| = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$$

$\Rightarrow$ T n'est pas linéaire $\Rightarrow T \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

② soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = a \neq 2a = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$$

$\Rightarrow$ T n'est pas linéaire $\Rightarrow T \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

3) $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cos(x)\, dx$

+ soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle T, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) \cos x\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_1 \varphi_1(x) \cos x + \alpha_2 \varphi_2(x) \cos x)\, dx$$

linéarité de l'intégrale

$$= \alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 \cos x\, dx + \alpha_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x) \cos(x)\, dx$$

$$= \alpha_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + \alpha \langle T, \varphi_2 \rangle \Rightarrow T \text{ est linéaire}$$

① Soit $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\varphi_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$

~~Donc~~ $|\forall q \langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[+\infty]{} 0|$

on a $|\langle T, \varphi_n \rangle| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) \cos x\, dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x)|\, |\cos x|\, dx$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x)|\, dx$$

①

on sait qu'il existe $[a,b]$ / $\text{supp}(\varphi_n) \subset [a,b]$, $\forall n$

$$\Rightarrow |\langle T, \varphi_n \rangle| \leq \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx \leq \sup_{x\in[a,b]} |\varphi_n(x)| \int_a^b dx$$

$$\leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |\varphi_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

D'où T est continue et donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

b) $\forall \varphi$ $\text{supp}(\varphi') \subseteq \text{supp}(\varphi)$

soit $x \in \text{supp}(\varphi') \Rightarrow x \in \text{supp}\,\varphi$

soit $x \notin \text{supp}(\varphi) \Rightarrow \forall \varphi$ $x \notin \text{supp}(\varphi')$

↑ $x \notin \text{supp}(\varphi)$ alors il existe un ouvert V qui contient x

tq $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in V$

$\Rightarrow \varphi'(x) = 0$, $\forall x \in V \Rightarrow x \notin \text{supp}(\varphi')$

$\Rightarrow \text{supp}(\varphi') \subseteq \text{supp}(\varphi)$

$\Rightarrow \text{supp}(\varphi^{(k)}) \subseteq \text{supp}(\varphi)$, $\forall k$

RQ : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ il existe $a > 0$ tq $\text{supp}(\varphi) \subseteq [-a, a]$

Ex 4 :

(1) $T_H' = \delta(x)$ (Voir cours)

φ ? $T_{|x|}'' = 2\delta(x)$?

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_{|x|}'', \varphi \rangle = (-1)^2 \langle T_{|x|}, \varphi'' \rangle = \langle T_{|x|}, \varphi'' \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varphi''(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} -x\,\varphi''(x)\,dx + \int_0^{+\infty} x\,\varphi''(x)\,dx$$

Ipp $\begin{cases} (-x) \longrightarrow -1 \\ \varphi'' \longrightarrow \varphi' \end{cases}$ $\begin{cases} x \longrightarrow 1 \\ \varphi'' \longrightarrow \varphi' \end{cases}$

$$= [(-x)\varphi'(x)]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,dx + [x\varphi'(x)]_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx$$

$$= 0 + 0 + \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx$$

$$= [\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - [\varphi(x)]_{0}^{+\infty} = \varphi(0) + \varphi(0) = 2\varphi(0) = 2\langle \delta, \varphi \rangle$$

$$= \langle 2\delta, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow T''_{|x|} = 2\delta(x)$$

+ $T''_{x|x|} = 2\,\mathrm{sign}(x)$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle T''_{x|x|}, \varphi \rangle = \langle T_{x|x|}, \varphi'' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x|x|\,\varphi''(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -x^2\varphi''(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} x^2\varphi''(x)\,dx$$

Ipp $\begin{cases} x^2 \longrightarrow 2x \\ \varphi'' \longrightarrow \varphi' \end{cases}$

$$= [x^2\varphi'(x)]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} 2x\,\varphi'(x)\,dx + [x^2\varphi'(x)]_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} 2x\,\varphi'(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 2x\,\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} 2x\,\varphi'(x)\,dx$$

Ipp $\begin{cases} 2x \longrightarrow 2 \\ \varphi' \longrightarrow \varphi \end{cases}$

$$= [2x\varphi]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} 2\varphi(x)\,dx - [2x\varphi]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} 2\varphi(x)\,dx$$

$$= 2\left[\int_{-\infty}^{0} (-1)\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} (1)\varphi(x)\,dx\right]$$

$$= 2\langle T_f, \varphi \rangle \text{ avec } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$= \langle 2T_f, \varphi \rangle \qquad = \mathrm{sign}(x)$$

$$\Rightarrow T''_{x|x|} = 2T_f = 2\,\mathrm{sign}\,x.$$

2) a) i) $x^2\delta''(x) = ?$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle x^2\delta'', \varphi\rangle = \langle \delta'', x^2\varphi(x)\rangle = (-1)^2\langle \delta, (x^2\varphi(x))''\rangle$$

$$= \langle \delta, (2x\varphi(x) + x^2\varphi'(x))'\rangle$$

$$= \langle \delta, 2\varphi(x) + 2x\varphi'(x) + 2x\varphi'(x) + x^2\varphi''(x)\rangle$$

$$= \langle \delta, 2\varphi(x)\rangle + \langle \delta, 4x\varphi'(x)\rangle + \langle \delta, x^2\varphi''(x)\rangle$$

$$= 2\varphi(0) + 4\cdot 0\,\varphi'(0) + 0\,\varphi''(0) = 2\varphi(0)$$

$$= \langle 2\delta, \varphi\rangle$$

$$\Rightarrow x^2\delta''(x) = 2\delta(x)$$

ii) $x^3\delta''(x) = ?$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle x^3\delta'', \varphi\rangle = \langle \delta'', x^3\varphi(x)\rangle = \langle \delta, (x^3\varphi(x))''\rangle$$

$$= \langle \delta, (3x^2\varphi(x) + x^3\varphi'(x))'\rangle$$

$$= \langle \delta, 6x\varphi(x) + 3x^2\varphi'(x) + 3x^2\varphi'(x) + x^3\varphi'(x)\rangle$$

$$= 0 \Rightarrow x^3\delta''(x) = 0$$

b) Mq $x^n\delta^{(n)} = (-1)^n n!\,\delta$, $n \in \mathbb{N}$

pour $n = 0$

$x^0\delta^0 = \delta$

$(-1)^0 0!\,\delta = 1\times 1\,\delta = \delta$

Vrai pour $n = 0$

supposons que $x^n\delta^{(n)} = (-1)^n n!\,\delta$

et Mq $x^{n+1}\delta^{(n+1)} = (-1)^{n+1}(n+1)!\,\delta$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle x^{n+1}\delta^{(n+1)}, \varphi\rangle = \langle \delta^{(n+1)}, x^{n+1}\varphi(x)\rangle$$

$$= \langle (\delta^{(n)})', x^{n+1}\varphi(x)\rangle$$

$$= -\langle \delta^{(n)}, (x^{n+1}\varphi'(x))'\rangle$$

$$= -\langle \delta^{(n)}, (n+1)x^n\varphi(x) + x^{n+1}\varphi'(x)\rangle$$

$$= -\langle \delta^{(n)}, (n+1)x^n\varphi(x)\rangle - \langle \delta^{(n)}, x^{n+1}\varphi'(x)\rangle$$

$$= -(n+1)\langle x^n\delta^{(n)}, \varphi\rangle - \langle x^n\delta^{(n)}, x\varphi'(x)\rangle$$

$$= -(n+1)\langle (-1)^n n!\,\delta, \varphi\rangle - \langle (-1)^n n!\,\delta, x\varphi'(x)\rangle$$

$$= (-1)^{n+1}(n+1)!\,\langle \delta, \varphi\rangle - (-1)^n n!\,\langle x\delta, \varphi'(x)\rangle$$

~~$= (-1)^{n+1}(n+1)!\,\langle \delta, \varphi\rangle - (-1)^n n!\,\langle -\delta, \varphi'(x)\rangle$~~

~~$= (-1)^{n+1}(n+1)!\,\langle \delta, \varphi\rangle + (-1)^n n!\,\langle \delta, \varphi'(x)\rangle$~~

$$= (-1)^{n+1}(n+1)!\,\langle \delta, \varphi\rangle + (-1)^n n!\,\langle (x\delta)', \varphi\rangle$$

$$= \text{_____} + (-1)^n n!\,\langle \delta + x\delta', \varphi\rangle$$

$$= \text{_____} + (-1)^n n!\,(\langle \delta, \varphi\rangle + \langle x\delta', \varphi\rangle)$$

$$= \text{_____} + (-1)^n n!\,(\langle \delta, \varphi\rangle - \langle \delta, \varphi\rangle)$$

$$= \langle \quad , \varphi\rangle$$

$$\Rightarrow \delta^{(n+1)} = (-1)^{n+1}(n+1)!\,\delta + (-1)^n n!\,\delta - (-1)^n n!\,\delta$$

$$= (-1)^{n+1}(n+1)!\,\delta + (-1)^n n!\,\delta + (-1)^{n+1} n!\,\delta$$

$$= C(-1)^n n!$$

$$\Rightarrow x^{n+1}\delta^{(n+1)} = (-1)^{n+1}(n+1)!\,\delta$$

Ex 2-6

1) $f(x) = \ln|x|$ est définie sur $\mathbb{R}^*$

pour montrer que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, il suffit de mq f est intégrable sur $[-b, b]$, avec $b > 0$, car le problème se pose pour les compactes de $\mathbb{R}$ qui contiennent le zéro.

$$\int_{-b}^{b} \ln|x|\,dx = 2\int_{0}^{b} \ln|x|\,dx$$

$\lim_{0} x\ln x = 0$

avec : $\int_{0}^{b} \ln|x|\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{b} \ln|x|\,dx$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{b} \ln(x)\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[x\ln x - x\right]_{\varepsilon}^{b} = \lim_{\varepsilon \to 0} b\ln b - b - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon$$

$= b\ln(b) - b < +\infty \Rightarrow \int_{0}^{b} \ln|x|\,dx$ existe et

$$\int_{0}^{b} \ln|x|\,dx = b\ln(b) - b$$

Donc $2\int_{-b}^{b} \ln(x)\,dx = 2(b\ln(b) - b)$

Donc $x \longmapsto \ln|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow T_{\ln|x|} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Conclusion : comme $x \longmapsto \ln|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Donc $T_{\ln|x|}$ est dérivable

2) $T'_{\ln|x|} = ?$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle T'_{\ln|x|}, \varphi \rangle = -\langle T_{\ln|x|}, \varphi' \rangle$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x)\,\varphi'(x)\,dx - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

IPP $\begin{cases} \ln|-x| \to -\frac{1}{x} \\ \varphi' \to \varphi \end{cases}$ IPP $\begin{cases} \ln(x) \to \frac{1}{x} \\ \varphi' \to \varphi \end{cases}$

$$-\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\left[\ln(-x)\varphi(x)\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \left[\ln(x)\varphi(x)\right]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right]$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln(\varepsilon)\varphi(-\varepsilon) - \ln(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(\varepsilon)\left[\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)\right] + \langle Vp(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle$$

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(\varepsilon)\left|\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)\right| = \\ \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(\varepsilon)(2\varepsilon\varphi'(0)) \\ \quad = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\ln(\varepsilon) - 2\varphi'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(\varepsilon) \overset{DL}{=} \varphi(0) + \varepsilon\varphi'(0) \\ \varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\varphi'(0) \end{cases}$$

$$\text{Cl} : \left(T_{\ln|x|}\right)' = Vp\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

3) $T_{\ln|x|} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $x \longmapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty$ $\Rightarrow x\,T_{\ln|x|} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ donc dérivable

on a :

$$\textcircled{+}\quad \left(x\,T_{\ln|x|}\right)' = T_{\ln|x|} + x\,T'_{\ln|x|} = T_{\ln|x|} + x\,Vp\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

$\textcircled{+}$ d'autre part, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle (x\,T_{\ln(x)})', \varphi\rangle = -\langle x\,T_{\ln|x|}, \varphi'(x)\rangle$$

$$= -\langle T_{\ln|x|}, x\,\varphi'(x)\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\,x\,\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\langle T_{x\ln|x|}, \varphi'(x)\rangle = \langle (T_{x\ln|x|})', \varphi(x)\rangle$$

$$= \langle T_{(x\ln|x|)'}, \varphi(x)\rangle = \langle T_{\ln|x|+1}, \varphi(x)\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\ln|x|+1)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\,\varphi(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

$$= \langle T_{\ln|x|}, \varphi\rangle + \langle T_1, \varphi\rangle = \langle T_{\ln|x|} + T_1, \varphi\rangle$$

$$\Rightarrow \left(x\,T_{\ln|x|}\right)' = T_{\ln|x|} + T_1$$

Cl & x $Vp\left|\frac{1}{x}\right| = T_1$

Exo 5 &

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

① $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f ~~est~~ $\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

et par suite, $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

② $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ donc elle est dérivable et $T'_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

f est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}\setminus\{0,1\})$ et $f(1^+) = 2$, $f(1^-) = 1$

$f(0^+) = 0$, $f(0^-) = 1$

avec la formule de Sauts on a :

$$T_f' = T_{f'} + 1\,\delta_1 + (-1)\,\delta$$

$$= T_{f'} + \delta_1 - \delta \quad \text{avec } f'(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$\langle T_f', \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sin } x\varphi(x)\,dx + \int_0^1 \varphi(x)\,dx + 2\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx + \varphi(1) - \varphi(0)$$

3) $T_f'' = ?$

$$T_f'' = (T_f')' = (\delta_1 - \delta + T_{f'})' = \delta_1' - \delta' + (T_{f'})'$$

on a $f' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\setminus\{0,1\})$ avec :

$f'(1^+) = 2$, $f'(1^-) = 1$

$f'(0^+) = 1$ $f'(0^-) = 0$

avec la formule de sauts :

$(T_{f'})' = T_{f''} + \delta_1 + \delta$ avec $f''(x) = \begin{cases} -\cos x, & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\Rightarrow T_f'' = \delta_1' - \delta' + \delta_1 + \delta + T_{f''}$

pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\langle T_f'', \varphi \rangle = -\varphi'(1) + \varphi'(0) + \varphi(1) + \varphi(0) - \int_{-\infty}^{0} \cos x \, \varphi(x)\, dx$

Exc 3 :

(1) $T_n = n\left(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}\right)$

on a : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}), \varphi(x) \rangle$

$= \lim_{n\to+\infty} n\left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right|$

~~$= \lim$~~ on $\begin{cases} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \varphi(0) + \frac{1}{n}\varphi'(0) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \varphi\left(-\frac{1}{n}\right) = \varphi(0) - \frac{1}{n}\varphi'(0) + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases}$

$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{2}{n}\varphi'(0)\right) = 2\varphi'(0) = 2\langle \delta, \varphi' \rangle = -2\langle \delta', \varphi \rangle$

$= \langle -2\delta', \varphi \rangle$

d'où $\lim_{n\to+\infty} n\left(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}\right) = -2\delta'$

(2) $T_n = n^2\left(\delta_{1_n} + \delta_{-1/n} - 2\delta_0\right)$

(3) $T_n = T_{\sin(nx)}$

$\lim_{n\to+\infty} \langle T_{\sin(nx)}, \varphi(x) \rangle = \lim \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(nx)\, \varphi(x)\, dx \right)$

$\left| \langle T_{\sin(nx)}, \varphi \rangle \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(nx)\, \varphi(x)\, dx \right|$ { φ est à support compact

$= \left| \int_{-A}^{A} \sin(nx)\, \varphi(x)\, dx \right| \leq \left(\int_{-A}^{A} |\sin(nx)||\varphi(x)|\, dx \right.$ supp$(\varphi) \subset]-A, A[$

$\leq$ ~~$\sup_{[-A;A]} |\varphi(x)| \int_{-A}^{A} dx$~~ on fait ça lorsque on a $|T| \leq 0$

$\Rightarrow T \to 0$

$\int_{-A}^{A} \sin(nx)\varphi(x)\, dx$ $\begin{cases} \varphi(x) \to \varphi'(x) \\ \sin(nx) \to -\frac{\cos(nx)}{n} \end{cases} = \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\varphi(x) \right]_{-A}^{A} + \int_{-A}^{A} \frac{1}{n}\cos(nx)\varphi'(x)\, dx$

$= \frac{1}{n}\int_{-A}^{A} \cos(nx)\varphi'(x)\, dx$

(9)